

Análise de Métodos Numéricos para Resolver Equações Diferenciais

Juliana Carpes Imperial¹

¹Departamento de Informática – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
(PUC-Rio)

Rua Marquês de São Vicente 225 – 22.453-900 – Rio de Janeiro – RJ – Brazil

{juliana}@inf.puc-rio.br

1. Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um programa que faça uma análise da consistência de métodos de passo múltiplo para equações diferenciais ordinárias de ordem 1, as quais podem ser equações simples ou sistemas. Esses métodos poderão ser simples, compostos (genéricos) ou cíclicos. No caso de métodos simples, também é feita a análise da consistência para equações diferenciais ordinárias especiais de ordem maior do que 1.

Um segundo objetivo é fazer o programa testar a estabilidade do método usando o teste da exponencial. Isso só será feito se ele tiver a consistência calculável e for consistente, e se essa tiver sido calculada (a consistência não será calculada para métodos compostos que não sejam cíclicos, nem para métodos cíclicos que sejam para equações diferenciais ordinárias especiais de ordem maior do que 1).

A motivação para este projeto é a importância da consistência para uma correta aproximação da solução de uma equação diferencial. Um método inconsistente pode levar a uma aparente convergência a solução, que não é de fato uma aproximação da solução correta. E um método instável não converge para uma solução. Com esse programa, alunos de cursos de cálculo numérico e análise numérica podem verificar o quão bons são os métodos que estão usando para resolver equações diferenciais.

2. Introdução

Para o cálculo da consistência de métodos cíclicos ou compostos, é preciso analisar, primeiramente, a consistência de cada algoritmo separadamente. Já para o cálculo da consistência de métodos simples, tudo o que se precisa fazer é analisar a consistência do seu único algoritmo.

Para essa análise, usa-se as definições de: operador diferencial, quando a consistência pode ser calculada, consistência, ordem de consistência, coeficiente e constante de erro, ordem de consistência de métodos compostos e cíclicos, e aumento de consistência para métodos compostos e cíclicos, definidas em [1, 2, 4] apresentadas aqui [3] de maneira estendida para o caso de o algoritmo ser aplicado para equações diferenciais ordinárias especiais de ordem maior do que 1.

Depois de toda essa análise da consistência, se o método tiver a consistência calculável e for consistente, ele terá a sua estabilidade testada. Como já se sabe que ele é consistente, não é necessário usar uma análise matemática para saber se o mesmo é estável. Testando-se o método com uma equação diferencial, tal como a exponencial,

será possível saber se ele é instável se o método não convergir. Se convergir, ele é estável (pode-se afirmar isso pois, se o método for instável, os erros de arredondamento o levarão a divergir).

O teste da estabilidade é feito com a equação cuja solução é a exponencial: $y^{(n)}(x) = y(x)$, $y(0) = 1$, $y(0)' = 1$, ..., $y(0)^{(n-1)} = 1$, onde n é a ordem da equação diferencial.

Uma observação a ser feita é que esse teste não é feito para métodos cíclicos para equações diferenciais ordinárias especiais de ordem maior do que 1, porque a consistência não é analisada para esse tipo de método, então, se esse teste divergir, não será possível saber qual foi a causa da divergência (inconsistência ou instabilidade). Porém, esse teste é facilmente aplicável nesse tipo de método.

Por fim, como os métodos testados são de passo múltiplo, para se achar as k primeiras aproximações, foi usado o polinômio de Taylor truncado com a ordem de consistência do método.

3. Funcionamento do Programa

1. Analisa os parâmetros entrados ao programa. Nesses parâmetros devem ser dados o tipo do método e os nomes dos arquivos onde o método está definido, sendo apenas um arquivo para métodos simples e mais de um para compostos e cíclicos (em um arquivo está a definição de um algoritmo de um método).
2. Se o formato dos parâmetros não estiver correto, esse será mostrado ao usuário e o programa, abortado.
3. Se o formato estiver correto, os arquivos começarão a ser lidos. Se algum erro acontecer, uma mensagem apropriada será exibida ao usuário e o programa será abortado.
4. Se nenhum erro ocorrer, o método será exibido ao usuário, informando o tipo de método (símples, composto ou cíclico), o passo dado nos arquivos, o passo real do método (se o passo dado nos arquivos for maior do que aquele realmente usado pelo método), a ordem da equação diferencial ordinária especial e os coeficientes de cada algoritmo do método.
5. Agora, é calculada a consistência de cada algoritmo passado ao método. Para cada algoritmo, se sua consistência puder ser calculada, a análise fornecerá os seguintes dados: se o algoritmo é implícito ou explícito, o coeficiente de erro, a constante de erro, se o algoritmo é ou não consistente, e, se o algoritmo for consistente, sua ordem de consistência. Se a consistência não puder ser calculada, apenas será dita ao usuário essa informação.
6. Neste ponto, se o método dado for composto e não-cíclico, cíclico com a ordem da equação diferencial maior do que 1, ou possuir algoritmos inconsistentes ou com consistência não calculável, uma mensagem será exibida indicando algum desses aspectos e o programa será abortado. Senão, será exibida uma mensagem dizendo que o método é consistente e qual a sua ordem de consistência.
7. Se o método for cíclico com a ordem da equação diferencial ordinária igual a 1, será montada uma matriz para saber se o método pode vir a ter a ordem de consistência aumentada de 1. Ela será escalonada para ter seu posto calculado. A matriz aumentada para o método, a mesma matriz já escalonada, seu posto

e a informação de que a ordem de consistência é, na verdade, maior, ou que a consistência é a que fora calculada anteriormente, serão exibidas ao usuário.

8. Finalmente é realizado o teste da estabilidade, para o caso de métodos simples ou cíclicos com a ordem da equação diferencial ordinária igual a 1 e que sejam consistentes (o programa terá sido abortado anteriormente se isso não for satisfeito).
9. O teste é feito usando a equação cujo resultado é a exponencial, como explicado no anteriormente. É calculado o resultado real para o ponto $x = 1$, e as aproximações usando o método dado para $h = 0, 1$ e $h = 0, 01$ para esse ponto. Essas informações serão exibidas ao usuário, juntamente com a informação sobre o resultado do teste (se o método é estável ou não).

4. Interface com o Usuário

O usuário interage muito pouco com este programa. Tudo o que ele precisa fazer é entrar os parâmetros certos ao programa, que possuem o seguinte formato:

- *CONSISTENCIA SI NOM_ARQ*;
- *CONSISTENCIA CO NOM_ARQ1 NOM_ARQ2 [NOM_ARQ3 .. NOM_ARQN]*, ou
- *CONSISTENCIA CI NOM_ARQ1 NOM_ARQ2 [NOM_ARQ3 .. NOM_ARQN]*.

onde *SI* significa método simples; *CO*, composto, e *CI*, cíclico.

O resto da interação do programa com o usuário é em forma textual, exibindo ao usuário mensagens, análises e resultados. Para cada algoritmo de um método (sendo que para métodos simples só há um algoritmo) é passado um arquivo ao programa. Ele possui o seguinte formato:

1. Tamanho do passo
2. ordem da equação diferencial especial
3. coeficientes (2 x tamanho do passo + 2)

Ou seja, o arquivo deve ter esta aparência:

passo do metodo

ordem da equação diferencial especial

α_0

α_1

α_2

...

β_0

β_1

β_3

...

Referências

- [1] Costa, T. S., Notas de aula em Métodos Numéricos para Equações Diferenciais.
- [2] Henrici, P., Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons (December 1962).
- [3] Imperial, J. C., Uma Análise Geral da Consistência, Trabalho Final de Curso, Departamento de Informática, PUC-Rio, (2001).
- [4] Lambert, J. D., Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons (1972).